M. ABD-LEFDIL

Université Mohammed V- Agdal **Année universitaire 06-07**
Département de Physique

Mécanique quantique
Série n°4 SM- SMI

I- Si le commutateur de deux opérateurs commute avec chacun d'eux:[A,[A,B]]= [B,[A,B]]= 0, on a l'identité de Glauber:

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$$

Pour cela, nous allons procéder par étapes.

a- Montrer que $\left[B, A^n\right] = nA^{n-1}\left[B, A\right]$.

En déduire que $\left[B, e^{-Ax}\right] = -xe^{-Ax}\left[B, A\right]$ où x est un paramètre.

b- Considérer l'opérateur dépendant du paramètre x : $f(x) = e^{Ax}e^{Bx}$

Déterminer l'expression de $\frac{df}{dx}$ en fonction de A, B, [A,B] et f(x). En déduire l'identité de Glauber.

II- Soient deux quantités physiques décrites par les opérateurs hermitiques A et B.

a- En écrivant le commutateur de A et B sous la forme :

$$[A,B] = iC$$

Montrer que C est un opérateur hermitique.

b- Démontrer la relation d'incertitude d'Heisenberg sur ce deux observables:

$$\Delta A \; \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle [A,B] \rangle\right|$$

Indication: Considérer le vecteur $|\varphi\rangle = (A+i\lambda B)\,|\psi\rangle$ et écrire que le carré de sa norme est positif ou nul.

III- Dans plusieurs problèmes de mécanique quantique, l'espace des états n'a que deux dimensions. C'est le cas par exemple pour le spin de l'électron. De même, quand les deux premiers niveaux d'un système quantique sont proches en énergie et bien séparés des niveaux supérieurs, on peut le traiter comme un système à deux niveaux.

Dans cet exercice, on considère donc un espace de Hilbert à 2 dimensions auquel on associe une base constituée de deux états propres qu'on notera $|\varphi_0\rangle$ et $|\varphi_1\rangle$.

a- Dans cette base, l'hamiltonien H s'exprime sous forme d'une matrice 2×2.

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W} \\ W & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Où W a la dimension d'une énergie et représente ce qu'on appelle un couplage.

Déterminer les valeurs propres E_+ et E_- de H.

b- exprimer les vecteurs propres $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ en fonction de $|\varphi_0\rangle$ et $|\varphi_1\rangle$.

c- A l'instant t=0, l'état du système est $|\psi(0)\rangle = |\varphi_0\rangle$.

Exprimer $|\psi(0)\rangle$ dans la base des vecteurs propres.

d- Résoudre l'équation de Schrödinger dans la base des vecteurs propres en tenant compte de la condition initiale.

e- Montrer que la valeur moyenne de H est indépendante du temps.

f- Montrer que la probabilité de trouver le système à l'instant t dans l'état $|\varphi_1>$ est une fonction oscillante du temps à la fréquence $\frac{2\,W}{h}$

g- Reprendre le calcul avec $\begin{pmatrix} E & \mathbf{W} \\ W & \mathbf{-E} \end{pmatrix}$

Montrer que la fréquence des oscillations est égale à $2\frac{\sqrt{W^2+E^2}}{h}$ et leur amplitude à $\frac{W^2}{W^2+E^2}$

IV- Dans un espace vectoriel à deux dimensions, on considère l'opérateur A dont la matrice, dans une base orthonormée {|1>, |2>}, s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathbf{i\sqrt{2}} \\ -i\sqrt{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

1- A est-il hermitique?
2- Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres qu'on notera $|\psi_1>$ et $|\psi_2>$.
(On donnera leur développement normalisé dans {|1>, |2>})
3- Vérifier que A est une observable.
4- Exprimer A dans la base $\{|\psi_1>,|\psi_2>\}$

V- On considère un système physique dont l'espace des états est à trois dimensions, rapporté à une base orthonormée {|1>,|2>, |3>}.
Dans la base de ces trois vecteurs, l'opérateur hamiltonien H du système et l'observable B s'écrivent :

$$H = 2\hbar\omega \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Où ω et b sont des constants réelles positives.
1- H et B sont-ils hermitiques?
2- Montrer que H et B commutent. Donner une base de vecteurs propres communs à H et B.
3- Parmi les ensembles d'opérateurs : {H}, {B}, {H,B}, $\{H^2,B\}$ lesquels forment un E.C.OC. ?

Exercices complémentaires:

I- Montrer que [A,BC]= [A,B] C+ B [A,C]
Développer $[A,B^n]$ en fonction de [A,B]
Cas où [A,[A,B]]= 0
Cas particulier : A= X et B= P_x

II-
a- Les fonctions d'une base continue appelée base de Fourier (ou encore ase des ondes planes) sont données par:

$$V_\alpha(x) = V_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{p\mathbf{x}}{\hbar}}$$

P étant la quantité de mouvement.
Montrer les relations d'orthonormalisation et de fermeture (R.O. et R.F.).

b- Même question pour la base de Dirac $V_\alpha(x) = V_y(x) = \delta(y - x)$

III- Soit ξ_3 un espace des états à 3 dimensions.
Soit {|1>,|2>,|3>} une base discrète orthonormée et complète dans ξ_3.
1- Donner R.O. et R.F.
2- Soit un état physique noté $|\psi>$ tel que :

$$|\psi>= a_1 |1>+a_2 |2>+a_3 |3>$$

Chercher les a_i pour que $|\psi>$ soit normé et que a_1, a_2 et a_3 forment une suite géométrique de raison 2.
3- déterminer l'opérateur de projection P_ψ et montrer qu'il est bien hermitique.

IV- Soit une observable représentée, dans la base $\{|+>_Z,|->_Z\}$, par la matrice :

$$S_Z = \frac{\hbar}{2}\sigma_Z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

1- Quels sont les valeurs et les vecteurs propres de S_Z.
2- Dans la base $\{|+>_Z,|->_Z\}$, on définit les opérateurs S_x et S_y:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad S_Y = \frac{\hbar}{2}\sigma_Y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-i} \\ \mathbf{i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

a- S_x et S_y sont-ils hermitiques?
b- Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de S_x et S_y.
c- Calculer $[S_x,S_y]$, $[S_y,S_z]$ et $[S_z,S_x]$.
d- On définit S^2 par : $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$
Calculer $[S^2,S_z]$. Conclure
Remarque: les matrices σ_x, σ_y et σ_z sont appelées matrices de Pauli.

M. ABD-LEFDIL

Exercices en version anglaise :

I-

4. The Hamiltonian operator for a two-state system is given by

$$H = a(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (1)$$

where a is a number with the dimension of energy. Find the energy eigenvalues and the corresponding energy eigenkets (in terms of linear combinations of $|1\rangle$ and $|2\rangle$).

5. A certain observable in quantum mechanics has a 3×3 matrix representation as follows:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Find the normalized eigenvectors of this observable and the corresponding eigenvalues. Is there any degeneracy? Try to give a physical example where all of this might be relevant.

III-

Let $\hat{A}$ and $\hat{B}$ be Hermitian operators that commute with the Hamiltonian, but which do not commute with each other.

(a) Prove that the eigenstates of the Hamiltonian must be degenerate. [Hint: Assume the contrary and derive a contradiction.] (*20 pts.*)

IV-

Assume $\hat{A}$ is a linear operator with eigenvector $|\phi\rangle$ and eigenvalue a. Another linear operator $\hat{B}$ has the following commutation relation with $\hat{A}$:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{B} + 2\hat{B}\hat{A}^2$$

Show that $\hat{B}|\phi\rangle$ is an eigenvector of $\hat{A}$ and find the eigenvalue. [15 pts.]

V-

A ket that is a solution of Schrödinger's equation with a Hamiltonian that is Hermitian and that has no explicit time dependenceΓhas a norm that is independent of time.

a. Prove that statement.

b. If the Hamiltonian is not Hermitian and has no explicit time dependence what does this mean for the norm and for the total probability to find a system in any one of its possible states?

c. Show that any non-Hermitian operator S can be written as a sum $S = A + iB$ where the operators A and B are Hermitian.

d. If the non-Hermitian Hamiltonian of a system is $H = A - iB/2$ with eigenvalue $\alpha - i\beta/2$ find the physical meaning of α and β.